Les maths dans le calendrier : le calendrier perpétuel

Certains de nos élèves de 1ère S ayant choisi le calendrier comme thème de recherche de TPE, nous avons voulu leur donner des outils mathématiques utiles et adaptés à leur niveau.

De nombreux articles[1] ont été écrits sur le calendrier perpétuel. Le but de celui-ci est d'expliciter la réalisation des tableaux d'indices[2] que l'on utilise pour déterminer le jour de la semaine correspondant à une date donnée.

Introduction

Les notions utilisées ici sont la congruence modulo 7 et la partie entière d'un nombre réel (cf. encadrés 4 et 5).

Chaque entier étant congru au reste de sa division euclidienne par 7, et les restes possibles étant 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 on peut ranger de manière unique chaque entier dans une des 7 classes d'équivalence modulo 7.

On attribue à chacun des 7 jours de la semaine un nombre appelé **indice du jour** : dimanche 0 ; lundi 1 ; mardi 2 ; mercredi 3 ; jeudi 4 ; vendredi 5 ; samedi 6.

On fait ensuite calculer aux élèves les restes de la division euclidienne par 7 de nombres importants pour le calendrier : nombre de jours dans un mois, nombre de jours dans une année.

Après avoir expliqué aux élèves ces notions, on peut leur poser quelques petits exercices simples les mettant en jeu (cf encadré 1 pour les réponses) :

1 - Si un mois commence par un lundi, par quel jour commence le mois suivant ?
2 - Si une année commence par un lundi quel jour est le 25 septembre ?
3 - Sachant que le premier janvier 2002 était un mardi, quel jour était le premier janvier 1900 ?
4 - Quel jour de la semaine êtes-vous né ?
(en faisant le calcul à partir de la date où est posé l'exercice).
5 - Quel est le nombre d'années normales et le nombre d'années bissextiles séparant :
a) le premier janvier de l'année 1981 du premier janvier de l'année séculaire la précédant soit l'année1900.
b) le premier janvier de l'année 2081 du premier janvier de l'année séculaire la précédant soit l'année 2000.
6 - Quel est le nombre d'années bissextiles et d'années normales séparant le premier janvier de deux années séculaires successives ?

Ce dernier exercice est l'occasion de parler aux élèves de la réforme à la base du calendrier grégorien[3].

A Rome, en Espagne et au Portugal, le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 fut le vendredi 15 octobre.

Etant donnée une date J, quel est le jour de la semaine qui lui correspond ?

On choisit dans un premier temps une date origine J_0 : le premier mars d'une année fictive 0. (La correction des années bissextiles se faisant à la fin du mois de février il est commode de choisir le premier mars).

On se donne une date J, par exemple le 14 juillet 2002. Une date est formée de quatre éléments :

- le quantième **q** du jour (dans le mois)
- le mois **M**
- le millésime $a = \overline{mcdu} = 1000\,m + 100\,c + 10\,d + u$

qu'on subdivise en deux éléments :

- le début $\mathbf{C} = \overline{mc} = 10\,m + c$; C est le nombre de centaines du millésime,
- la fin du millésime $\mathbf{U} = \overline{du} = 10\,d + u$.

$$a = 100\,C + U.$$

Une année séculaire, la dernière d'un siècle, est caractérisable par U = 0.

Pour notre exemple : q = 14, M = juillet, a = 2002 donc C = 20, U = 02.

On fait intervenir trois autres dates associées à J_0 et J de la façon suivante :

- J_1 est le premier mars de l'année séculaire précédant (ou identique à) l'année a.
- J_2 est le premier mars de l'année a.
- J_3 est le premier jour du mois M de l'année a.

Encadré 1

Solutions des exercices

1 - Si un mois commence par un lundi,
- s'il comporte 28 jours, le mois suivant commence par un lundi : $28 \equiv 0$ [7].
- s'il comporte 29 jours, le mois suivant commence par un mardi : $29 \equiv 1$ [7].
- s'il comporte 30 jours, le mois suivant commence par un mercredi : $30 \equiv 2$ [7].
- s'il comporte 31 jours, le mois suivant commence par un jeudi : $31 \equiv 3$ [7].

2 - Entre le premier janvier et le premier septembre de l'année il y a 5 mois à 31 jours, 2 mois à 30 jours et 1 mois à 28 jours si elle est non bissextile, 1 mois à 29 jours si elle est bissextile.
Calculons le décalage si l'année est non bissextile : $5 . 31 + 2 . 30 + 28 \equiv 5 \times 3 + 2 \times 2 + 0$ [7] $\equiv 5$ [7]
Le décalage de 5 jours livre, avec premier janvier = lundi : $1 + 5 = 6$: samedi
Donc le 25 septembre sera un mardi : $6 + 24 \equiv 2$ [7].
Si l'année est bissextile, le décalage sera de : $5 \times 31 + 2 \times 30 + 29 \equiv 5 \times 3 + 2 \times 2 + 1$ [7] $\equiv 6$ [7]
Le 1er septembre sera un dimanche : $1 + 6 = 7 \equiv 0$ [7]
Donc le 25 septembre sera un mercredi : $7 + 24 \equiv 2$ [7]

3 - Entre le premier janvier 1900 et le premier janvier 2002, il y a 102 années dont 25 bissextiles et 77 non bissextiles.
$25 \times 2 + 77 \times 1 = 127 \equiv 1$ [7]. Le premier janvier 1900 était un lundi.

5 - Entre le premier janvier 1900 et le premier janvier 1981, il y a 81 années dont 20 bissextiles car 1900 n'est pas bissextile.
Entre le premier janvier 2000 et le premier janvier 2081, il y a 81 années dont 21 bissextiles car 2000 est bissextile.

7 - Avant la réforme grégorienne, l'intervalle séparant le premier janvier de deux années séculaires consécutives comportait toujours 25 années bissextiles
Après la réforme grégorienne deux cas se présentent. Voici un exemple de chacun :
Entre le premier janvier 1600 et le premier janvier 1700, il y a 100 années dont 25 bissextiles car 1600 est bissextile.
Entre le premier janvier 1700 et le premier janvier 1800, il y a 100 années dont 24 bissextiles car 1700 n'est pas bissextile...

Encadré 2

L'exemple du 14 juillet 2002 : q = 14 ; M = juillet ; C = 20 ; U = 02

J_0	J_1	J_2	J_3	J
Date origine fictive : 1er mars 0 dans le calendrier grégorien	1er mars 2000	1er mars 2002	1er juillet 2002	14 juillet 2002
Durée en jours	$\Delta(J_0J_1)$ = 20 siècles	$\Delta(J_1J_2)$ = 2 ans	$\Delta(J_0J_1)$ = 4 mois	$\Delta(J_0J_1)$ = 13 jours
son reste modulo [7]	$I_0 = 0$	$I_1 = 2$	$I_2 = 3$	$I_3 = 6$
Calculs	$5 \times C + E(C / 4) = 105 \equiv 0$ [7]	$U + E(U / 4) = 2 \equiv 2$ [7]	3 (juillet)	$I_3 \equiv q - 1$ [7] $= 13 \equiv 6$ [7]

Pour notre exemple :
J_1 est le premier mars 2000,
J_2 est le premier mars 2002,
J_3 est le premier juillet 2002.

$\Delta(J_0J)$ est la durée (algébrique) de l'instant J_0 vers l'instant J (exprimée en nombre de journées).

$\Delta(J_0J) = \Delta(J_0J_1) + \Delta(J_1J_2) + \Delta(J_2J_3) + \Delta(J_3J)$

$\Delta(J_0J_1)$ est la durée de l'instant J_0, premier mars de l'année 0 vers l'instant J_1, premier mars de l'année séculaire précédant a. Pour la calculer, on a besoin de connaître le début C du millésime. Le reste modulo 7 de ce nombre est noté I_0.

$\Delta(J_1J_2)$est la durée de l'instant J_1, premier mars de l'année séculaire précédant l'année a vers la date J_2, premier mars de l'année a. Pour la calculer, on a besoin de connaître la fin U du millésime. Le reste modulo 7 de ce nombre est noté I_1.

$\Delta(J_2J_3)$ est la durée de l'instant J_2, premier mars de l'année a, vers l'instant J_3, premier jour du mois M. Pour la calculer, on a besoin de connaître le mois M. Le reste modulo 7 de ce nombre est noté I_2.

$\Delta(J_3J)$ est la durée de l'instant J_3, premier jour du mois M, vers l'instant J. Pour la calculer, on a besoin de connaître le quantième q. Le reste modulo 7 de ce nombre est noté I_3.

On a donc, I(J) désignant l'indice de la date J :

$$\mathbf{I(J) - I(J_0) \equiv I_3 + I_2 + I_1 + I_0 \ [7]}$$

➡ Calcul de I_3

Entre les dates J_3 et J il y a (q - 1) jours, donc I_3 est congru à (q - 1) modulo 7.

$$\mathbf{I_3 \equiv q - 1 \ [7]}$$

Pour notre exemple (q - 1) = 13 donc $I_3 = 6$.

➡ Calcul de I_2

Pour mars on a $I_2 = 0$.
$31 \equiv 3$ [7] donc pour avril on aura $I_2 = 3$.
$30 \equiv 2$ [7] donc pour mai on aura $I_2 = 3 + 2 = 5$.
et ainsi de suite ...

Pour le mois de février d'une année normale, la différence $\Delta(J_2J_3)$ est égale à - 28 soit 0 modulo 7. Pour février d'une année normale on aura alors $I_2 = 0$.

Pour le mois de février d'une année bissextile, la différence $\Delta(J_2J_3)$ est égale à - 29 soit 6 modulo 7. Pour février d'une année bissextile, on aura alors $I_2 = 6$.

Pour le mois de janvier d'une année normale, la différence $\Delta(J_2J_3)$ est égale à - 28 - 31 soit 4 modulo 7. Pour janvier d'une année normale on aura alors $I_2 = 4$.

Pour le mois de janvier d'une année bissextile, la différence $\Delta(J_2J_3)$ est égale à - 29 - 31 soit 3 modulo 7. Pour janvier d'une année bissextile on aura alors $I_2 = 3$.

On obtient donc le tableau suivant (où (n) désigne une année normale et (b) une année bissextile) :
pour notre exemple $I_2 = 3$.

I_2	mois
0	**février (n) ; mars ; novembre.**
1	**juin**
2	**septembre ; décembre.**
3	**janvier (b) ; avril ; juillet**
4	**janvier (n) ; octobre**
5	**mai**
6	**février (b) ; août.**

➡ Calcul de I_1

Du premier mars d'une année au premier mars de l'année suivante, la durée est de 365 jours si la deuxième année est normale et de 366 jours si la deuxième année est bissextile.
$365 \equiv 1$ [7] et $366 \equiv 2$ [7] donc une année normale crée un décalage de 1 et une année bissextile un décalage de 2.

Pour calculer la durée du premier mars de l'année séculaire précédant a vers le premier mars de l'année a on calcule le nombre total d'années et le nombre d'années bissextiles rencontrées.

Le nombre total d'années est U et le nombre d'années bissextiles rencontrées est la partie entière de U / 4 (on a commencé au premier mars pour ne pas se poser le problème de savoir si l'année séculaire est ou non bissextile).
$J_2 - J_1 = 365 \times U + 1 \times E(U/4) \equiv U + E(U/4)$ [7]

$$\mathbf{I_1 \equiv U + E(U/4) \ [7]}$$

Pour notre exemple $I_1 = 2$ (U = 2 donc E(U/4) = 0).
Pour C = 00, $I_1 = 0$; pour C = 01, $I_1 = 1$; pour C = 02, $I_1 = 2$; pour C = 03, $I_1 = 3$; pour C = 04, $I_1 = 5$; pour C= 06, $I_1 = 6$...

➡ Calcul de I_0 dans le calendrier grégorien

Dans le calendrier julien, une année sur 4 est bissextile donc l'intervalle séparant deux années séculaires consécutives est formé de 25 années bissextiles et de 75 années normales. le décalage correspondant à un siècle est donc 125, congru à 6 modulo 7.

Dans le calendrier grégorien, seule une année séculaire sur 4 est bissextile. La durée séparant le premier mars d'une année séculaire du premier mars de l'année séculaire non bissextile suivante comporte 24 années bissextiles et 76 années nor-

males. Le décalage correspondant est donc de 124 congru à 5 modulo 7.

Entre le premier mars de l'année 0 et le premier mars de l'année a, on a C siècles comportant 24 ou 25 années bissextiles dont E (C/4) en comportent 25.

$$I_0 \equiv C \times 5 + E(C/4) \ [7]$$

Pour notre exemple $I_0 = 0$ (C = 20 donc E(C/4) = 5, donc $I_0 \equiv 20 \times 5 + 5 \equiv 0$ [7]). En effet, pour C = 19 on a E(C/4) = 4 donc $I_0 \equiv 5 \times 19 + 4 \equiv 1$ [7]).

On peut maintenant connaître l'indice de n'importe quel jour J si on connaît l'indice de J_0.

Pour cela on part de l'indice connu d'un jour J : le 14 juillet 2002 est un dimanche. I(J) = 0
Donc $0 \equiv I(J_0) + 0 + 2 + 3 + 6 \equiv I(J_0) + 4$ [7]
donc $I(J_0) \equiv -4$ [7] donc $I(J_0) = 3$.

Le premier mars de l'année fictive J_0 est donc un mercredi.
Pour n'importe quel jour J on a alors :

$$I(J) \equiv 3 + I_3 + I_2 + I_1 + I_0 \ [7]$$

➡ Indices pratiques

Pour une plus grande commodité d'utilisation, les indices théoriques I_0, I_1, I_2, I_3 sont remplacés par des indices pratiques définis ci-dessous et présentés dans les tableaux d'indices de la page ci- contre.
on pose $i_3 = I_3 + 1 \equiv q$ [7] : i_3 est l'indice du quantième.
on pose $i_2 = I_2 + 3$ de manière à ce que l'indice du mois de janvier (n) soit 0 ; i_2 est l'indice du mois.
on pose $i_1 = I_1$; i_1 est l'indice de la fin du millésime.
On pose $i_0 = I_0 + 6$ de manière à avoir $i_0 = 0$ pour le début du millésime 19. i_0 est l'indice de début de millésime.
On a alors $I(J) \equiv 3 + i_3 - 1 + i_2 - 3 + i_1 + i_0 - 6$ [7] donc :

$$I(J) \equiv i_3 + i_2 + i_1 + i_0 \ [7]$$

➡ Cas du calendrier julien

Dans le cas du calendrier julien, J_0 est le premier mars de l'année julienne fictive 0, qui n'est pas le même que précedemment. On choisit pour J le jeudi 4 octobre 1582, dernière date julienne avant la réforme grégorienne à Rome.

On a pour cette date I(J) = 4 ; $I_3 = 3$; $I_2 = 4$; $I_1 = 4$;
$I_0 = 15 \times 6 \equiv 6$ [7]
Donc $I(J_0) + 3 + 4 + 4 + 6 \equiv 4$ [7] donc $I(J_0) = 1$.
Le premier mars julien 00 aurait été un lundi. D'où pour un jour J quelconque du calendrier julien :

$$I(J) \equiv 1 + I_3 + I_2 + I_1 + I_0 \ [7]$$

On a alors $I(J) \equiv 1 + i_3 - 1 + i_2 - 3 + i_1 + I_0$ [7]
$\equiv i_3 + i_2 + i_1 + I_0 - 3$ [7]

Pour obtenir $I(J) \equiv i_3 + i_2 + i_1 + i_0$ [7]
on doit avoir $i_0 \equiv I_0 - 3$ [7] . On pose donc $i_0 = I_0 + 4$.

Notes et références :

1 - Références sur le calendrier perpétuel :

CC n° 20 : idées pour la programmation d'un calendrier grégorien par Maurice Carmagnole.
CC n° 31 : construction et mode d'emploi d'un calendrier perpétuel (maquette) par Jean-Paul Parisot.
CC n° 76 : un calendrier perpértuel (algorithme) par Michel Toulmonde.
CC n° 91: le calendrier perpétuel (maquette) par Michel Montangerand.
Une fiche du HS 3 (Le temps et les constellations) est consacrée au calendrier perpétuel.
Pour cet article, nous nous sommes inspirés de l'article de Roger Cuculière, "les mathématiques du calendrier", dans "Pour la Science" de novembre 1986.

2 - Les tableaux d'indices :

Ils sont présents dans les articles cités plus hauts et dans les éphémérides du BDL (Bureau des longitudes).

3 - La réforme grégorienne :

Ce sujet est traité dans tous les ouvrages sur les calendriers. C'est l'occasion de citer ici quelques références :

"La question du calendrier" ; Abbé Chauve-Bertrand, La Renaissance du livre Paris, 1920.
"Le calendrier : Histoire du monde" ; Ph. Vidal ; éd. Traditionnelles, 1978.
"Le calendrier" ; Paul Couderc ; que sais-je ? ; PUF, n° 203, 6e édition, 1986.
"HS n°3 : le temps et les constellations" ; Josée Sert, Cécile Schulman et Gilbert Walusinski, 1991.
"Calendriers et chronologie" ; Jean-Paul Parisot, et Françoise Suagher ; Masson, 1996.
"Le temps compté, le temps conté" ; David Ewing Duncan ; NIL éditions.
"La saga des calendriers ou le frisson millénariste" ; Jean Lefort ; Pour la Science, Belin 1998.
"Numéro spécial de "M13" sur les calendriers" ; Jacques Gispert ; bulletin de l'Association Marseillaise d'Astronomie (déc. 99), centre d'animation de quartier du Petit Bosquet, 213, avenue de Montolivet, 13012 Marseille.
"Rythmes du temps, astronomie et calendriers" ; Emile Biémont ; De Boeck, 2000 (recension dans le CC 91).
"Le calendrier, maître du temps?" ; Jacqueline de Bourgoing, Découvertes Gallimard n° 400 (recension dans le CC 95).

encadré 3

Tableaux d'indices

1	lundi
2	Mardi
3	Mercredi
4	Jeudi
5	Vendredi
6	Samedi
0	Dimanche

Indices des jours

1	1	8	15	22	29
2	2	9	16	23	30
3	3	10	17	24	31
4	4	11	18	25	
5	5	12	19	26	
6	6	13	20	27	
0	7	14	21	28	

Indices i_3 du quantième

L'indice du quantième est le reste modulo 7 du quantième du mois

1	mai		
2	février (b)	août	
3	février (n)	mars	novembre
4	juin		
5	septembre	décembre	
6	janvier (b)	avril	juillet
0	janvier (n)	octobre	

Indices i_2 du mois

1		1	7	12	18		29	35	40	46		57	63	68	74		85	91	96
2		2		13	19	24	30		41	47	52	58		69	75	80	86		97
3		3	8	14		25	31	36	42		53	59	64	70		81	87	92	98
4			9	15	20	26		37	43	48	54		65	71	76	82		93	99
5		4	10		21	27	32	38		49	55	60	66		77	83	88	94	
6		5	11	16	22		33	39	44	50		61	67	72	78		89	95	
0	0	6		17	23	28	34		45	51	56	62		73	79	84	90		

Indices i_1 de fin de millésime

A partir de l'indice 0 pour la fin de millésime 00, on ajoute 1 pendant trois ans et la quatrième année on ajoute 2

1	3	10					
2	2	9		18	22	26	30
3	1	8	15 J				
4	0	7	14	17	21	25	29
5		6	13				
6		5	12	16	20	24	28
0		4	11	15G	19	23	27

Indices i_0 de début de millésime julien jusqu'au 4 octobre 1582 grégorien à partir du 15 octobre 1582

A partir de 00 (J) on retranche 1 chaque début de millésime.
A partir de 15 (G) on retranche 1 puis trois fois 2 puis on recommence.

Encadré 4

La congruence modulo 7

Sur un cadran d'horloge à douze graduations horaires les instants 10 h, 22 h, 34h,..., - 2 h, - 14 h, ... voient l'aiguille à la même place et 5 h après 10 h il est 3 h. Pour faciliter ces raisonnements arithmétiques le mathématicien allemand C. F. Gauss inventa en 1801 (à 24 ans...) l'arithmétique modulaire dont voici un petit résumé dans le cas du nombre 7.

Les nombres 1 ; 8 (7 + 1) ; 15 (2 x 7 + 1) ; 22 (3 x 7 + 1) ; - 6 (- 1 x 7 + 1) ; - 13 (- 2 x 7 + 1) ... sont congrus à 1 modulo 7. Ils ont le même reste dans la division euclidienne par 7 : 1

<u>Définition 1</u> : a et b étant deux entiers (relatifs), on dit que a est congru à b modulo 7, s'il existe un entier relatif k tel que a = 7 x k + b.
Ceci se note a ≡ b [7].

<u>Propriété 1</u> : la relation de congruence modulo 7 est une relation d'équivalence dans l'ensemble Z des entiers.

Elle est **réflexive** : on a pour tout entier a a ≡ a [7]
En effet a = 7 . 0 + a

Elle est **symétrique** : quels que soient les entiers a et b : si a ≡ b [7] alors b ≡ a [7].
En effet s'il existe un entier k tel que a = 7 . k + b, alors il existe un entier (-k) telque b = 7 . (- k) + a.

Elle est **transitive** : quels que soient les entiers a, b, c : si a ≡ b [7] et si b ≡ c [7] alors a ≡ c [7].
En effet s'il existe un entier k et un entier k' tels que
a = 7 . k + b et b = 7 . k' + c alors
a = 7 . k + 7 . k' + c = 7 . (k + k') + c.

<u>Définition 2</u> : on appelle classe d'équivalence d'un entier l'ensemble de tous les entiers qui lui sont congrus.
La classe de l'entier 29 contient les entiers 1, 8, 16, 23, 29, ..., - 6, - 13, - 20, - 27, ...
C'est aussi la classe de l'entier 1.

<u>Définition 3</u> : division euclidienne par 7 (c'est la division de l'école primaire).
Pour tout entier relatif a il existe un unique couple d'entiers relatifs (q,r) vérifiant
a = 7 . q + r et 0 ≤ r <7.

q est le quotient euclidien de a par 7 et et r le reste modulo 7 de l'entier a.
On a alors a ≡ r [7].
Les classes d'équivalence de la congruence modulo 7 sont donc celles des 7 restes possibles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

<u>Propriété 3</u> : si deux entiers sont congrus modulo 7, alors ils ont même reste dans la division euclidienne par 7.

En effet si a ≡ b [7] et si b a pour reste r dans la divison euclidienne par 7,
alors a = 7 . k + b et b = 7 . k' + r et 0 ≤ r <7
donc a = 7 . (k + k') + r et 0 ≤ r <7 donc a pour reste r dans la division euclidienne par 7.

<u>Propriété 4</u> : la congruence modulo 7 est compatible avec l'addition, la soustraction et la multiplication dans Z.
Pour tous entiers a, b, c, d :
si a ≡ b [7] et si c ≡ d [7], alors
a + c ≡ b + d [7]
a - c ≡ b - d [7]
ac ≡ bd [7].

En effet s'il existe un entier k et un entier k' tels que
a = 7 . k + b et c = 7 . k' + d, alors :
a + c = 7 . (k + k') + b + d
a - c = 7 . (k - k') + b - d
ac = 7 . (7 . kk' + 7 . kd +7 . k'b) + bd.

Encadré 5

Partie entière d'un nombre réel

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n appelé partie entière du réel x et noté E(x), tel que :
n ≤ x <n + 1

26 / 7 ≈ 3,71
E(26 / 7) = 3 car 3 ≤ 26 / 7 < 4
Le reste de la division euclidienne de 26 par 7 est
26 - 7 x 3 = 26 - 7 x E(26 / 7) = 5
- 26 / 7 ≈ - 3,71
E(- 26 / 7) = - 4 car - 4 ≤ - 26 / 7 < - 3
Le reste de la division euclidienne de - 26 par 7 est
- 26 - 7 x (- 4) = - 26 - 7 x E(- 26 / 7) = 2

Plus généralement :
le reste modulo 7 du naturel n est n - 7 x E(n / 7).

■